

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

**РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО ДИФфуЗОРНОГО ТЕЧЕНИЯ
В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С НЕОДНОРОДНЫМ НАЧАЛЬНЫМ
ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ***Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»***Введение**

В работах [1–4] автором были рассмотрены задачи развития ламинарного диффузорного течения с однородным начальным профилем скорости. Данное предположение, как правило, справедливо при поступлении жидкости в канал из резервуара или другого канала с площадью поперечного сечения намного большим, чем площадь поперечного сечения в каналах, где мы изучали развитие ламинарного течения. Такие условия могут наблюдаться, например, при течении жидкости в каналах различных гидравлических машин [5].

Однако во многих практически интересных случаях течения, например, в проточных каналах формирующего инструмента полимерных аппаратов перед соосными коническими диффузорами жидкость протекает через соосные цилиндрические каналы (рис. 1). Такие конструкции типичны для трубных и кабельных головок [6], а также для головок раздувного формования [7].

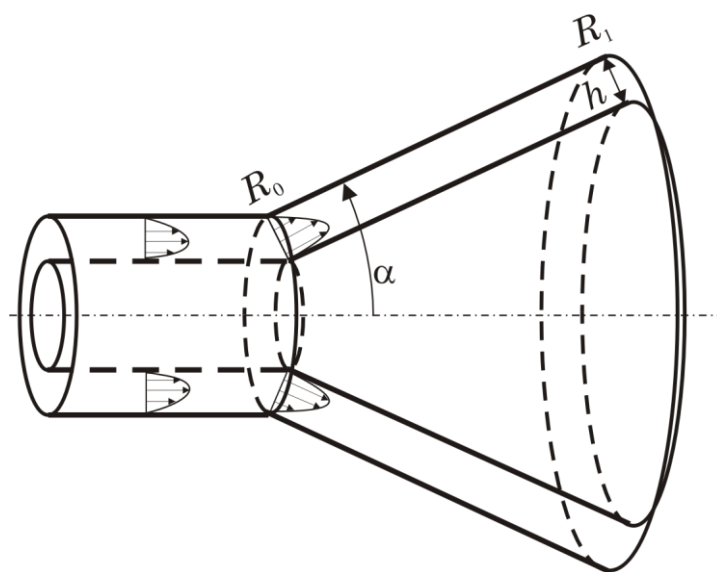


Рисунок 1 – Сопряжение кольцевого цилиндрического канала с соосным коническим диффузором

В подобных составных каналах, как правило, конструкционно выполняется плавный переход из одного соосного канала в другой. В этих случаях в соосный конический диффузор жидкость поступает с уже сформированным профилем скорости, отличным как от однородного распределения, так и от профиля, который будет сформирован в соосном коническом диффузоре.

В дальнейшем исследовании в пределах данного раздела будем считать, что жидкость поступает в соосный конический диффузор из сопряженного с ним коаксиального цилиндрического канала (рис. 1). Известно, что профиль установившегося течения жидкости в коаксиальном цилиндрическом канале является несимметричным относительно серединной поверхности канала [8], а его максимум смещен к цилиндрической поверхности с меньшим радиусом.

Для решения задачи развития ламинарного течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины применим приближение, использованное в работах [9,10],

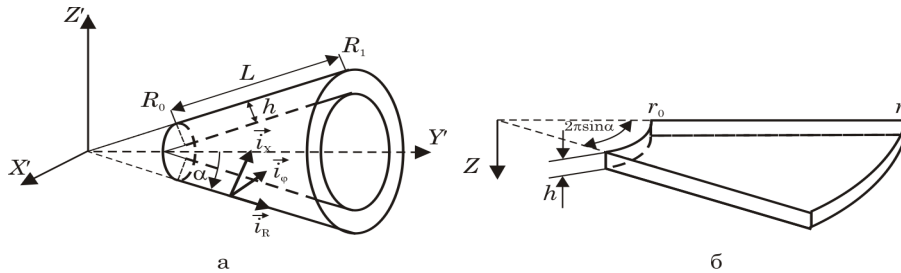


Рисунок 2 – Геометрия конического зазора постоянной ширины: а – связь декартовых и биконических координат с геометрией канала: L – длина конической части канала, м; h – ширина зазора, м; $\mathbf{i}_R, \mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$ – орты в биконической системе координат; б – разворот конического зазора на плоскость

т.е. будем рассматривать развитие ламинарного течения в секториальном диффузоре постоянной ширины (рис. 2) с неоднородным профилем скорости на входе в канал.

Постановка задачи и определение начального профиля скорости

Так же, как и в [9,10], мы будем использовать для решения задачи цилиндрические координаты. Для записи математической формулировки задачи используем безразмерные переменные и параметры,

$$\xi = \frac{r}{h}, \quad \chi = \frac{z}{h}, \quad v = \frac{V_r}{V_{f0}}, \quad \Pi = \frac{(P - P_0)h}{\mu V_{f0}}, \quad \text{Re}_f = \frac{\rho V_{f0} h}{\mu}, \quad (1)$$

где средняя по площади поверхности поперечного сечения на входе в канал скорость определится выражением:

$$V_{f0} = \frac{Q}{2\pi r_0 \sin \alpha h}. \quad (2)$$

В данных безразмерных переменных формулировка задачи будет совпадать с формулировкой задачи о развитии ламинарного течения с однородным распределением скорости на входе в канал [1] за исключением записи, которая и определяет распределение скорости на входе, которая в нашем случае будет являться несимметричной относительно серединной поверхности канала функцией. Обозначая ее как $v(\xi_0, \chi) = \omega(\chi)$, запишем математическую формулировку задачи:

$$\text{Re}_f \bar{v}_f \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}; \quad (3)$$

$$v = 0, \quad \chi = 0; \quad (4)$$

$$v = 0, \chi = 1; \quad (5)$$

$$v = \omega(\chi), \xi = \xi_0; \quad (6)$$

$$\Pi = 0, \xi = \xi_0, \quad (7)$$

а условие постоянства расхода в безразмерном виде запишется, как:

$$\int_0^1 v d\chi = \frac{\xi_0}{\xi}. \quad (8)$$

Несимметричный относительно срединной поверхности канала начальный профиль скорости можно представить в виде суммы степенных функций:

$$\omega(\chi) = a + b\chi^k + c\chi^n, \quad (9)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты.

Заметим, что аналогичный подход для подбора профиля скорости был использован Таргом в его монографии [11] при создании приближенного метода расчета пограничного слоя с помощью интегральных соотношений. Там же даны ссылки на более ранние работы, в которых применялись аналогичные методы.

Распределение скорости (9) должно удовлетворять граничным условиям прилипания (4) и (5), а также условию постоянства расхода (8). Из условия (4), $\omega(0) = 0$, получаем $a = 0$. А условие (20.158), $b + c = 0$, дает соотношение между коэффициентами b и c , $b = -c$, и тогда функцию $\omega(\chi)$ мы можем представить в виде:

$$\omega(\chi) = c(\chi^m - \chi^k), \quad (10)$$

подставляя которую в условие постоянства расхода при $\xi = \xi_0$, получаем:

$$c \int_0^1 (\chi^m - \chi^k) d\chi = 1. \quad (11)$$

Вычисляя интеграл в (11), находим выражение, определяющее постоянную c :

$$c = \frac{(m+1)(k+1)}{k-m}. \quad (12)$$

И тогда профиль скорости жидкости на входе в канал может быть описан функцией:

$$\omega(\chi) = \frac{(m+1)(k+1)}{k-m} (\chi^m - \chi^k). \quad (13)$$

Понятно, что функция (13) симметрична относительно замены m на k . Выберем значения m и k так, чтобы профиль скорости на входе в канал был достаточно наполненным и с максимумом скорости, смещенным к границе $\chi = 1$. Для этого можно брать значения: $m = 7$ и $k = 1$, при которых функция $\omega(\chi)$ примет вид:

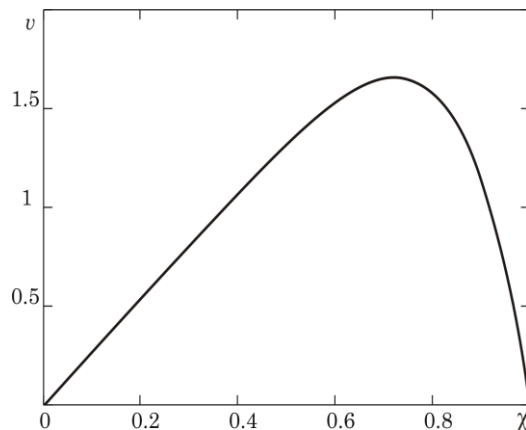


Рисунок 3 – Неоднородный профиль безразмерной скорости жидкости на входе в соосный конический диффузор, соответствующий распределению (15)

$$\omega(\chi) = -\frac{8}{3}(\chi^7 - \chi). \quad (14)$$

Зависимость (14) представлена на рисунке 3.

Следовательно, начальные условия для распределения скорости (6) сейчас мы должны записать как:

$$v = -\frac{8}{3}(\chi^7 - \chi), \quad \xi = \xi_0. \quad (15)$$

Тем самым мы получили математическую формулировку задачи развития ламинарного диффузорного течения в секториальном канале, аппроксимирующем соосный конический диффузор при неоднородном начальном распределении скорости жидкости. Задача формулируется системой уравнений (3)–(8), (15).

Решение задачи развития ламинарного течения в секториальном диффузоре при неоднородном начальном распределении скорости

Безразмерная средняя по площади поверхности поперечного сечения канала скорость определяется выражением

$$\bar{v}_f = \frac{\xi_0}{\xi}. \quad (16)$$

Подставляя (17) в (3), получим уравнение, описывающее движение жидкости в гидродинамическом участке секториального диффузора

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} - \text{Re}_f \frac{\xi_0}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = 0, \quad (17)$$

которое представляет собой нелинейное неоднородное уравнение в частных производных второго порядка.

Решать задачу (3)–(8) будем методом разложения по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля [12], соответствующей однородной задачи для уравнения (17).

Однородная часть уравнения (17) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} - \text{Re}_f \frac{\xi_0}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \quad (18)$$

Далее представим решение уравнения (18) в виде произведения:

$$v(\xi, \chi) = Y(\xi) \cdot \Psi(\chi). \quad (19)$$

Подставим (19) в уравнение (18) и разделим полученный результат на произведение (19). В результате получим уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные и перенося их в разные части равенства, получаем:

$$\text{Re}_f \frac{\xi_0}{\xi} \frac{1}{Y(\xi)} \frac{\partial Y(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\Psi(\chi)} \Psi'_{\chi}. \quad (20)$$

Поскольку левая часть (20) зависит только от ξ , а правая только от χ , и так как ξ и χ – независимые переменные, то каждая часть уравнения (20) должна быть константой, причем эта константа должна быть отрицательной [12, 13], т.е. мы можем записать:

$$\frac{\xi_0}{\xi} \frac{\text{Re}_f}{Y(\xi)} \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{1}{\Psi} \Psi''_{\chi} = -\beta^2, \quad (21)$$

или

$$Y' + \frac{\beta^2}{\xi_0 \text{Re}_f} \xi Y = 0, \quad (22)$$

$$\Psi'' + \beta^2 \Psi = 0. \quad (23)$$

Поскольку Y не зависит от χ , то из (4), (5) следуют граничные условия для Ψ :

$$\Psi = 0, \quad \chi = 0, \quad (24)$$

$$\Psi = 0, \quad \chi = 1. \quad (25)$$

Система уравнений (23)–(24) представляет собой задачу Штурма-Лиувилля для нахождения собственных функций сформулированной нами задачи.

Частными решениями уравнения (23) с граничными условиями (24) и (25) являются функции [13]:

$$\Psi_n(\chi) = \sin n\pi\chi, \quad (26)$$

где $n = 1, 2, 3 \dots \infty$, и, следовательно, общее решение однородного уравнения будет представляться некой суммой всех этих функций.

Система функций (26) является полной системой собственных функций или собственными векторами задачи Штурма-Лиувилля, обладающими свойством ортогональности [12,13]. Квадрат нормы собственных функций (26) равен:

$$\|\Psi_n\|^2 = \int_0^1 \sin^2 n\pi\chi d\chi = \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Для дальнейшего решения нам необходимо разложить функцию источника в уравнении (17) в ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, т.е. в ряд по функциям (26). Функцией источника в (17) является градиент давления. И сейчас мы сделаем достаточно сильное предположение, о котором автор говорил в работе[1].

На данном этапе мы предположим, что градиент давления является постоянной величиной.

В [1] отмечалось что, это предположение не является более сильным, чем предположение о заранее известной функциональной зависимости давления вдоль течения в канале, использованном в методе продолжения, который был представлен в монографии [14].

Такое предположение позволяет градиент давления представить в виде:

$$\Pi' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \pi n \chi, \quad (28)$$

где коэффициенты разложения определяем, используя свойства ортогональности и значение квадрата нормы собственных функций:

$$f_n = \frac{\int_0^1 \Pi' \sin \pi n \chi d\chi}{\|\Psi_n\|^2}, \quad (29)$$

откуда следует, что

$$f_n = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) \Pi'. \quad (30)$$

Поскольку решение задачи (17), (4)–(8) вследствие принципа суперпозиции представимо в виде суммы ряда по собственным функциям:

$$v(\xi, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\xi) \sin(\pi n \chi), \quad (31)$$

то, подставляя (30) и (28) в уравнения (17), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_n \Psi_n'' - \operatorname{Re}_f \frac{\xi_0}{\xi} \Psi_n Y_n' - \frac{2}{n} (1 - \cos \pi n) \Pi' \Psi_n \right] = 0, \quad (32)$$

и учитывая, что

$$\Psi_n''(\chi) = -\beta^2 \Psi_n(\chi), \quad (33)$$

из (32) получим уравнение для нахождения функций $Y_n(\xi)$:

$$Y_n' + \frac{\beta_n^2 \xi}{\operatorname{Re}_f \xi_0} Y_n + \frac{2\xi}{\pi n \operatorname{Re}_f \xi_0} (1 - \cos \pi n) \Pi' = 0. \quad (34)$$

Введем следующие обозначения:

$$G_1 = \frac{\beta_n^2}{\operatorname{Re}_f \xi_0}, \quad G_2 = \frac{2(1 - \cos \pi n) \Pi'}{\pi n \operatorname{Re}_f \xi_0}, \quad (35)$$

и перепишем (34) в виде уравнения

$$Y_n' + G_1 \xi Y_n + G_2 \xi = 0, \quad (36)$$

которое представляет неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Известно, что решение такого уравнения является суммой частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения [15]. Частное решение уравнения (36) легко находится и записывается в виде равенства:

$$Y_n = -\frac{G_2}{G_1} = -\frac{2(1 - \cos \pi n)}{(\pi n)^3} \Pi'. \quad (37)$$

Однородное уравнение, соответствующее (36), можно записать в виде:

$$\frac{dY_n}{d\xi} = -G_1 \xi Y_n, \quad (38)$$

т.е. мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Выполняя разделение переменных, приходим к следующему уравнению

$$\frac{dY_n}{Y} = -G_1 \xi d\xi, \quad (39)$$

которое имеет решение:

$$Y_n = C \exp\left(-\frac{1}{2} G_1 \xi^2\right), \quad (40)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (36) можно записать как:

$$Y_n(\xi) = C \exp\left(-\frac{1}{2} G_1 \xi^2\right) - \frac{G_2}{G_1}. \quad (41)$$

Для того, чтобы получить выражения, описывающие эволюцию профиля скорости при неоднородном начальном ее распределении, необходимо определить постоянную C в (41), а для этого необходимо определить функцию $Y_n(\xi)$ при $\xi = \xi_0$. Как и раньше, определим $Y_n(\xi_0)$, применяя разложение (41), в которое подставляем значение из условия (15).

После такой подстановки будем иметь выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\xi_0) \sin(\pi n \chi) = -\frac{8}{3} (\chi^7 - \chi). \quad (42)$$

Умножая правую и левую части (42) на $\sin(\pi n \chi)$ и записывая интегралы с учетом ортогональности собственных функций задачи и значения их квадрата нормы, получаем соотношение:

$$Y_n(\xi_0) = -\frac{16}{3} \int_0^1 (\chi^7 - \chi) \sin(\pi n \chi) d\chi. \quad (43)$$

Выполняя в (43) интегрирование, получим значение функции $Y_n(\xi)$ на входе в канал, т.е. при $\xi = \xi_0$:

$$Y_n(\xi_0) = (-1)^{n+1} \frac{224}{(\pi n)^3} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right]. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (41), получаем уравнение для нахождения постоянной интегрирования C :

$$(-1)^{n+1} \frac{224}{(\pi n)^3} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] = C e^{\frac{G_1 \xi_0^2}{2}} - \frac{G_2}{G_1}, \quad (45)$$

где G_1 и G_2 определены в (35).

Разрешая (45) относительно C , находим выражение:

$$C = \frac{2}{(\pi n)^3} \left\{ \left[1 - (-1)^n \right] \Pi' + 112(-1)^{n+1} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] \right\} e^{\frac{(\pi n)^2 \xi_0}{2 \operatorname{Re}_f}}, \quad (46)$$

которое записано с учетом того, что $\cos \pi n = (-1)^n$.

Далее, используя (46) и (37), из (41) находим выражение для определения функции $Y_n(\xi)$:

$$Y_n(\xi) = \frac{2}{(\pi n)^3} \left[1 - (-1)^n \right] \Pi' \left[e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{224(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}}. \quad (47)$$

Подставляя определение функции $Y_n(\xi)$ (47) в сумму (31), находим выражение, определяющее распределение безразмерной скорости в канале секториального диффузора в случае неоднородного начального профиля скорости, заданного безразмерным выражением (15):

$$v(\xi, \chi) = \Pi' \left[\frac{\chi^2 - \xi^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^3} e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} \sin(\pi n \chi) \right] +$$

$$+ 224 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} \sin(\pi n \chi). \quad (48)$$

Значение величины Π' определяем, воспользовавшись условием постоянства расхода в любом поперечном сечении канала (8), и вычисляя интеграл $\nu(\xi, \chi)$ в (8), получим:

$$\Pi' = \frac{12 \frac{\xi_0}{\xi} - 2688 \Xi_2}{48 \Xi_1 - 1}, \quad (49)$$

где

$$\Xi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{(\pi n)^4} \exp \left[\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0} \right], \quad \Xi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^4} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}}.$$

Для определения распределения безразмерного давления при развитии ламинарного течения в секториальном диффузоре с неоднородным начальным распределением скорости, как и в ранее рассматриваемых в настоящей главе случаях течения, воспользуемся балансом импульса на элементарном участке секториального канала (рис. 2).

Запишем составляющие баланса импульса для элементарного участка секториального диффузора (рис. 2) с пренебрежением массовыми силами

- суммарный поток количества движения, поступающий в элемент канала через нижнюю боковую поверхность при $z = 0$;

$$\delta S_0 \tau_{rz} \big|_{z=0} \quad (50)$$

- суммарный поток количества движения через верхнюю боковую поверхность при $z = h$;

$$-\delta S_0 \tau_{rz} \big|_{z=h} \quad (51)$$

- суммарный поток количества движения, поступающий через цилиндрическую поверхность входа в элемент канала при $r = r_0$;

$$S_0 \rho V_0 V_0 \quad (52)$$

- суммарный поток количества движения, уходящий через цилиндрическую поверхность, ограничивающую элемент канала на выходе из него при $r = r_0 + dr$;

$$-S_1 \rho V_1 V_1 \quad (53)$$

- поток импульса через цилиндрическую поверхность входа, вызываемый силой давления;

$$S_0 P_0 \quad (54)$$

- поток импульса через цилиндрическую поверхность выхода из элементарного участка канала, вызываемый силой давления,

$$-S_1 P_1 \quad (55)$$

где τ_{rz} – тангенциальное напряжение сдвига.

Сумма всех составляющих дает баланс количества движения:

$$\delta S_0 (\tau_{rz} \big|_{z=0} - \tau_{rz} \big|_{z=h}) + S_0 \rho V_0^2 - S_1 \rho V_1^2 + S_0 P_0 - S_1 P_1 = 0. \quad (56)$$

Распределение частной производной $\partial \nu / \partial \chi$ в секториальном диффузоре определится, как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \chi} = \Pi' & \left[\left(\chi - \frac{1}{2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^2} e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} \cos(\pi n \chi) \right] + \\ & + 224 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} \cos(\pi n \chi). \end{aligned} \quad (57)$$

Для того, чтобы вычислить безразмерные скорости сдвига на границах канала, нам достаточно в выражение (57) подставить значения $\chi = 0$ и $\chi = 1$. В первом из этих случаев безразмерная скорость сдвига определится выражением:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \Pi' & \left[-\frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^2} e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} \right] - \\ & - \frac{224}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}}, \end{aligned} \quad (58)$$

а во втором случае – выражением:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = \Pi' \left[\frac{1}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^2} e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}} \right] - \frac{224}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \operatorname{Re}_f \xi_0}}. \quad (59)$$

Мы видим, что выражения (58) и (59) не будут равны по абсолютной величине, а поэтому первый член в балансе (56) мы должны записать в виде:

$$\delta S_6 \left(\tau_{rz}|_{z=0} - \tau_{rz}|_{z=h} \right) = -2\pi\mu r \sin \alpha \left(\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h} \right) dr. \quad (60)$$

Подставляя (60) в (56), получим следующее выражение:

$$2\pi r h \sin \alpha \frac{dP}{dr} dr = -2\pi\mu r \sin \alpha \left(\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h} \right) dr + \frac{\rho Q^2 dr}{2\pi r^2 h \sin \alpha}. \quad (61)$$

И, проводя деление правой и левой части последнего равенства на $2\pi\mu r \sin \alpha$, мы получаем:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mu}{h} \left(\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h} \right) + \frac{\rho Q^2}{2\pi^2 r h^2 \sin^2 \alpha}, \quad (62)$$

выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления вдоль секториального диффузора при ламинарном течении с учетом начального гидродинамического участка и неоднородным профилем скорости на входе в канал.

Используя безразмерные переменные (1), запишем уравнение, определяющее градиент давления в безразмерном виде:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \text{Re}_f \frac{\xi_0^2}{\xi^3} - \left(\frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} \right). \quad (63)$$

Первый член в правой части (63) является динамической компонентой безразмерного градиента давления; второй член является диссипативной его составляющей. Интегрируя (63) вдоль ξ , определяем распределение безразмерного давления в секториальном диффузоре с учетом начального гидродинамического участка и с неоднородным начальным распределением скорости поперек канала:

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2} \text{Re}_f \left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 \right] - \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} \right) d\xi. \quad (64)$$

Для выполнения вычислений выражение, стоящее в круглых скобках в (64), можно сгруппировать и записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} = & \Pi' \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^2} e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \text{Re}_f \xi_0}} - 1 \right] + \\ & + 224 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^2} \left[1 - \frac{20}{(\pi n)^2} + \frac{120}{(\pi n)^4} \right] e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 \text{Re}_f \xi_0}}. \end{aligned} \quad (65)$$

Тем самым мы получили решение сформулированной в предыдущем пункте задачи с определением всех важнейших характеристик течения, необходимых для его дальнейшего исследования и проведения технических расчетов.

Анализ развития ламинарного течения в секториальном диффузоре с неоднородным профилем скорости на входе

В данном разделе статьи мы рассмотрим, к каким особенностям распределения основных параметров ламинарного диффузорного течения может привести неоднородное распределение профиля скорости на входе в секториальный канал постоянной ширины.

В выбранном начальном распределении скорости (15) безразмерная скорость жидкости на срединной поверхности равна $v_f(\xi_0, 0.5) = 1.3125$, что несколько меньше, чем значение безразмерной скорости стабилизированного течения в этой точке канала, $v(\xi_0, 0.5) = 1.5$. Поэтому в рассматриваемом случае течения скорость жидкости на срединной поверхности канала будет стремиться к своему стабилизированному значению снизу, аналогично тому, как это происходит при пространственно неустановившемся течении с однородным распределением скорости на входе в канал [1].

И если воспользоваться предложением Прандтля об определении длины начального гидродинамического участка, а в нашем случае это будет длина, на которой скорость жидкости на срединной поверхности, т.е. при $\chi = 0.5$, достигнет 99 % своего

установившегося значения, то безразмерная координата стабилизации течения при $Re_f = 5$ будет равна $\xi_{н.г} = 10.165$, что практически совпадает со значением, которое дает выражение, полученное в [2] – (20).

Однако, используя предложение Прандтля, практически невозможно получить простое выражение для оценки координаты стабилизации из решения (48). Но мы вправе сделать попытку найти простое выражение для оценки координаты, на которой происходит стабилизация течения при развитии ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины с помощью решения (48), поскольку в двух рассмотренных случаях это распределение совпадает на некоторой координате со стабилизированным течением аналогично решению в [1].

Чтобы получить простое выражение для оценки величины координаты стабилизации течения с помощью решения (48), предположим, что стабилизация течения наступает на том расстоянии от входа в канал, где исчезает влияние распределения скорости на входе в канал. Очевидно, это произойдет там, где суммы, входящие в выражение, определяющее распределение безразмерной скорости в канале (48), станут близкими к нулю. Каждый член суммируемых рядов в выражениях (48) и (49) содержит множитель, представленный экспонентой.

Именно этот множитель

$$E(\xi) = e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 Re_f \xi_0}} \quad (66)$$

стремится к 0 при увеличении безразмерной координаты ξ .

Представим экспоненту в виде суммы степенного ряда и, считая для дальнейшей оценки аргумент экспоненты меньше единицы, что вполне разумно в рассматриваемых случаях течения, и, отбрасывая в сумме члены ряда выше первого, получим:

$$e^{\frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 Re_f \xi_0}} \approx 1 + \frac{(\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2)}{2 Re_f \xi_0}. \quad (67)$$

Для того, чтобы суммы, входящие в выражение, определяющее распределение скорости, были равны нулю, необходимо, чтобы каждый член суммы был равен нулю, поскольку с увеличением n члены убывают по абсолютной величине.

Приравнявая к нулю (67), получим уравнение:

$$2 Re_f \xi_0 + (\pi n)^2 (\xi_0^2 - \xi^2) = 0, \quad (68)$$

откуда находим безразмерную координату, на которой n -й член суммы в рассматриваемых выражениях становится равным нулю:

$$\xi^* = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{2\xi_0}{(\pi n)^2} Re_f}. \quad (69)$$

Мы видим из (69), что при увеличении n безразмерная координата ξ^* уменьшается, и при $n \rightarrow \infty$ стремится к ξ_0 , а это означает, что наибольшее влияние начального распределения скорости на дальнейшее ее распределение вдоль течения оказывается через первые члены в суммах, т.е. безразмерная координата, на которой первый член в суммах решений (48) станет близок к нулю, является наибольшей. Следовательно, по-

лагая в (69) $n = 1$, получим выражение для приближенного вычисления безразмерной координаты стабилизации течения:

$$\xi_{н.г}^* = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{2\xi_0}{\pi^2} Re_f} = \xi_0 \sqrt{1 + \frac{2Re_f}{\pi^2 \xi_0}}. \quad (70)$$

Заметим также, что отличны от нуля в суммах (48) члены только с нечетными значениями n . А в тех случаях, когда второй член под знаком радикала меньше 1, т.е.:

$$\frac{2Re_f}{\pi^2 \xi_0} \leq 1, \quad (71)$$

выражение (70) можно упростить, разлагая радикал в степенной ряд и пренебрегая степенями выше первой:

$$\xi_{н.г}^* = \xi_0 \sqrt{1 + \frac{2Re_f}{\pi^2 \xi_0}} \approx \xi_0 \left(1 + \frac{Re_f}{\pi^2 \xi_0} \right) = \xi_0 + \frac{1}{\pi^2} Re_f, \quad (72)$$

и, подставляя значение для π , окончательно получаем:

$$\xi_{н.г}^* = \xi_0 + 0.101 Re_f. \quad (73)$$

А соотношение (73) является справедливым, как следует из (71), при выполнении условия:

$$Re_f < \frac{\pi^2}{2} \xi_0 = 4.93 \xi_0. \quad (74)$$

При течении в секториальном диффузоре постоянной ширины, выбранном нами для анализа начального гидродинамического участка в настоящей главе, соотношение (73) справедливо при $Re_f < 4.93$. При дальнейшем анализе пространственно неустановившегося ламинарного течения мы увидим, что выражение (73) остается справедливым в более широком интервале изменения чисел Рейнольдса Re_f .

Выражение (70) при $Re_f = 5$ приводит к величине $\xi_{н.г} = 10.49$, а (73) дает значение 10.5. При $Re_f = 50$ координата стабилизации, вычисленная непосредственно из распределения скорости составит значения $\xi_{н.г} = 14.0$, а соотношения (70) и (73) приводят к величинам 14.2 и 15.05 соответственно. При числе Рейнольдса $Re_f = 100$ в области течения, прилегающей к границе $\chi = 0$, при формировании стабилизированного пограничного слоя скорость жидкости сначала уменьшается, достигает своего установившегося значения, незначительно его превышает и уже затем вниз по течению стремится к зависимости, характерной для установившегося течения (рис. 4). В области, прилегающей к границе $\chi = 1$, скорость жидкости сразу уменьшается вниз по течению до своего стабилизированного значения (рис. 4).

Здесь необходимо отметить, что область потока, в которой скорость жидкости быстрее всего достигает величин, близких к значениям профиля скорости при стабилизированном течении, находится между срединной поверхностью и границей $\chi = 0$ (рис. 4). А это в свою очередь означает, что при пространственно неустановившемся течении, с уже каким-либо образом сформированным профилем скорости, пограничный слой не распространяется, начиная от границы и затем на всю ширину потока вниз по

течению, а профиль скорости сразу начинает перестраиваться по всей своей ширине. Но все-таки на срединной поверхности канала стабилизация скорости жидкости в рассматриваемом случае наступает в последнюю очередь (рис. 4).

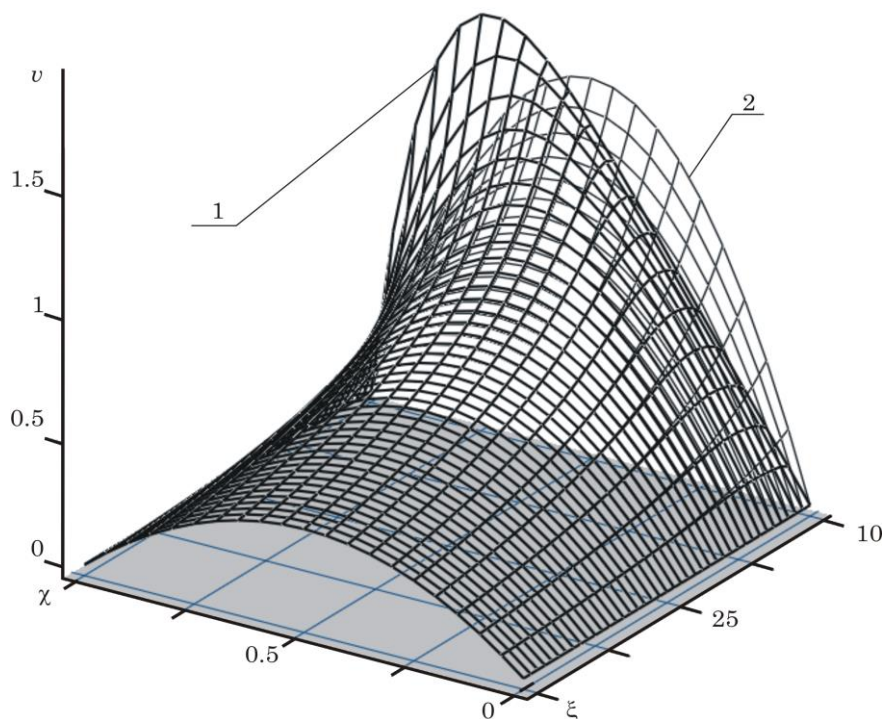


Рисунок 4 – Распределение безразмерной скорости жидкости вдоль течения в секториальном диффузоре с числом Рейнольдса $Re_f = 100$:
1 – для неоднородного начального распределения скорости (15); 2 – для течения с установившемся распределением скорости

Здесь скорость сначала немного возрастает, но затем начинает снижаться, оставаясь меньше скорости стабилизированного течения (рис. 5). Достигнув стабилизированного значения, скорость жидкости, как и в ранее рассмотренных случаях, превосходит его и уже сверху стремится к зависимости скорости от радиальной координаты при установившемся течении (рис. 5).

Безразмерная координата стабилизации течения при $Re_f = 100$ равна $\xi_{н.г} = 21.8$. Значения $\xi_{н.г}$, которые дают приближенные выражения, полученные из решения задачи методом разделения переменных, равны соответственно $\xi_{н.г} = 17.4$ и $\xi_{н.г} = 20.1$ для выражений (70) и (73).

Само начальное неоднородное распределение безразмерной скорости (15), несимметричное относительно срединной поверхности канала, уже закладывает неравенство абсолютных значений безразмерных скоростей сдвига на границе канала (рис. 6). Если в случае стабилизированного течения или в случае пространственно неустановившегося течения с однородным распределением скорости на входе в канал распределения $\dot{\gamma}_Г$ на границах отличались только по знаку, а по модулю были равны, то в данном случае, значения скоростей сдвига на границах канала в его входном срезе находим из (15):

$$\dot{\gamma}_{\Gamma}(\xi_0, 0) = \frac{8}{3}, \quad (75)$$

$$\dot{\gamma}_{\Gamma}(\xi_0, 1) = -16. \quad (76)$$

Значения скоростей сдвига на границах входа в канал будут действительны для всех чисел Рейнольдса, и именно с них будет начинаться изменение скоростей сдвига на границах канала при пространственно неустановившихся ламинарных течениях с неоднородным начальным профилем скорости (15).

Заметим, что распределение безразмерных скоростей сдвига в случае пространственно неустановившегося течения с уже сформированным профилем скорости, хотя и несоответствующем стабилизированному распределению скорости в рассматриваемом канале, является более пологим, чем распределение в случае течения с однородным начальным распределением скорости [1]. Это понятно, потому что при однородном распределении скоростей $|\dot{\gamma}_{\Gamma}|$ начинает уменьшаться практически от ∞ , а при неоднородном начальном распределении (15) от модуля величины (75) и (76), соответственно для своей границы.

На границе $\chi = 0$ профиль скорости более пологий, чем при стабилизированном течении (рис. 4), поэтому на этой границе и безразмерная скорость сдвига по абсолютной величине меньше, чем в случае установившегося течения (рис. 6). На границе $\chi = 1$, где профиль скорости более крутой в начале течения (рис. 4), безразмерная скорость сдвига по абсолютной величине больше абсолютной величины безразмерной скорости сдвига стабилизированного течения.

Далее вниз по течению распределение безразмерной скорости сдвига на границе $\chi = 0$ увеличивается по абсолютной величине (рис. 6) за счет того, что в прилегающей к этой границе области течения профиль скорости становится более наполненным (рис. 4), достигает своего максимума на некотором расстоянии от входа в канал и затем начинает уменьшаться, в основном уже за счет уменьшения средней по площади поперечного сечения скорости жидкости (рис. 4). Заметим, что средняя по площади поперечного сечения канала скорость не зависит от профиля скорости в сечении, и в безразмерном виде является геометрической характеристикой канала (17).

Таким образом, зависимость $|\dot{\gamma}(\xi)|_{\chi=0}$ является явно немонотонной при $Re_f = 100$.

В начале течения, когда вблизи границы $\chi = 0$ профиль скорости становится более наполненным, у границы $\chi = 1$ его наполненность уменьшается (рис. 4), а это приводит к уменьшению абсолютной величины безразмерной скорости сдвига на границе канала (рис. 6), т.е. зависимость $|\dot{\gamma}(\xi)|_{\chi=1}$ является монотонно убывающей. Но с увеличением числа Рейнольдса при достижении скорости на срединной поверхности канала своего значения для стабилизированного течения за счет инерционных свойств поток жидкости в центральной части канала не успевает замедлиться, как это происходит при полностью развитых пограничных слоях в течении жидкости. Поэтому при существенных числах Re_f существует отрезок канала, где скорость жидкости в центральной части выше, чем в стабилизированном потоке (рис. 5), а это приводит к несколько более вытянутому профилю скорости, и, как следствие, к меньшим абсолютным значениям скоростей сдвига на границах канала по сравнению со значениями скоростей сдвига на границах канала в случае стабилизированного течения (рис. 6).

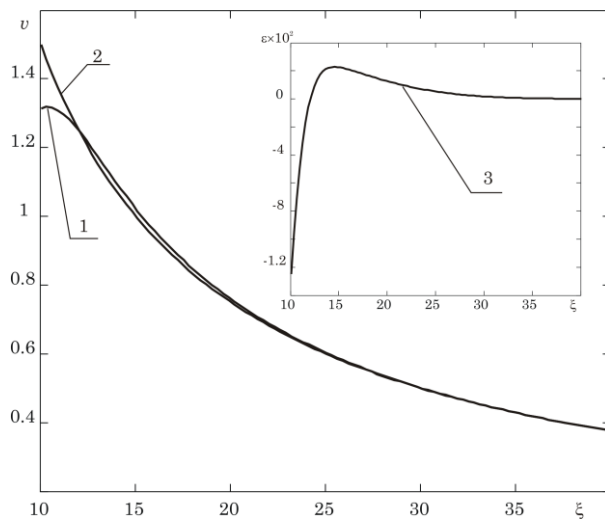


Рисунок 5 – Распределение безразмерной скорости на срединной поверхности секториального диффузора при ламинарном течении с $Re_f = 100$: 1 – для неоднородного начального распределения скорости на входе в канал (20.168); 2 – для установившегося течения; 3 – относительное отклонение распределения 1 от распределения 2

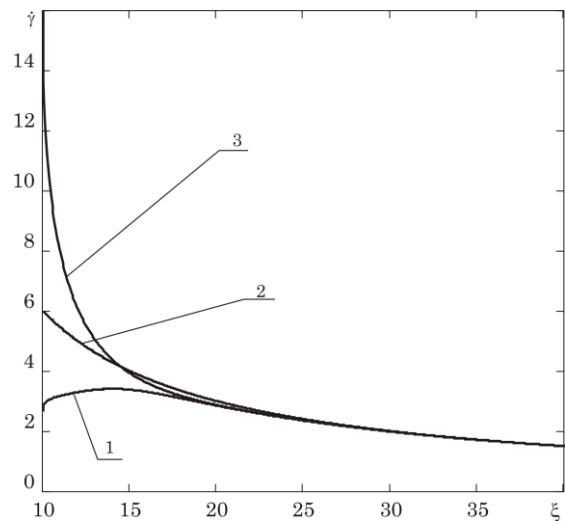


Рисунок 6 – Распределение безразмерной скорости сдвига на границах секториального диффузора при ламинарном течении с числом Рейнольдса $Re_f = 100$: 1 – на границе $\chi = 0$ в условиях развивающегося течения при неоднородном начальном распределении скорости поперек канала; 2 – на границе канала $\chi = 0$ при установившемся течении; 3 – распределение модуля безразмерной скорости сдвига на границе $\chi = 1$ при течении с неоднородным начальным распределением скорости

Ранее мы вычислили, что диссипативная составляющая безразмерного градиента давления является суммой модулей безразмерных скоростей сдвига на границах канала, взятой с отрицательным знаком. Это справедливо как для пространственно неустановившегося течения (63), так и для стабилизированного течения. И поэтому все особенности распределения скоростей сдвига на границах канала будут присутствовать в распределении диссипативных компонент безразмерного градиента давления.

В начале течения с числом Рейнольдса $Re_f = 100$ и неоднородным профилем скорости на входе в канал сумма модулей скоростей сдвига на границах больше, чем при стабилизированном течении, поэтому здесь больше и модуль диссипативной составляющей градиента давления у пространственно неустановившегося течения (рис. 7). Далее вниз по течению в соответствии с распределением скоростей сдвига на границах канала модуль диссипативной составляющей безразмерного градиента давления для пространственно неустановившегося течения становится меньше, чем для стабилизированного течения и приближается к нему при стабилизации течения сверху.

Поскольку динамическая составляющая безразмерного градиента давления полностью определяется безразмерной средней по площади поверхности поперечного сечения канала скоростью, то она одинакова как для расчета безразмерного градиента в пространственно неустановившемся течении (63), так и в случае стабилизированного течения [9]. А это означает, что к отрицательными значениями диссипативной составляющей безразмерного давления будет суммироваться положительная динамическая составляющая, которая при $Re_f = 100$ приобретает уже существенное значение вблизи

входа в секторальный диффузор. По абсолютной величине динамическая составляющая еще меньше модуля диссипативных составляющих, поэтому в обоих случаях безразмерный градиент будет отрицательный (рис. 8).

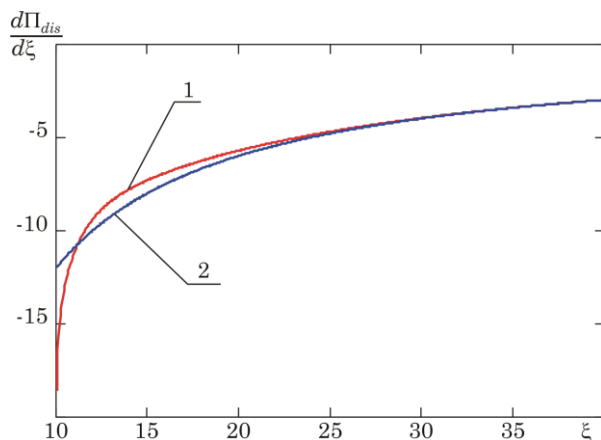


Рисунок 7 – Распределение вдоль ламинарного диффузорного течения с $Re_f = 100$ в секторальном канале постоянной ширины диссипативной составляющей безразмерного градиента давления: 1 – вычисленной для течения с учетом начального гидродинамического участка при неоднородном начальном распределении скорости; 2 – для течения с установившемся профилем скорости

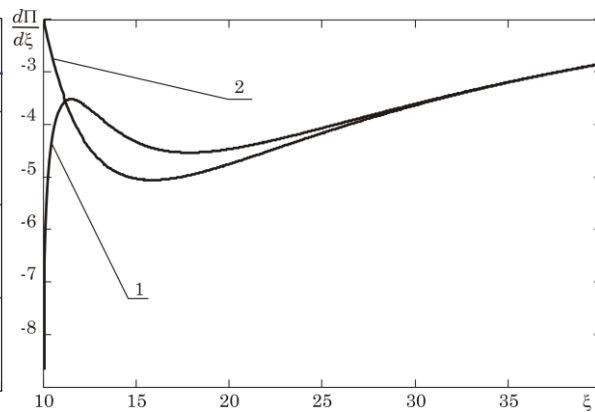


Рисунок 8 – Распределение вдоль ламинарного диффузорного течения с $Re_f = 100$ в секторальном канале постоянной ширины безразмерного градиента давления: 1 – вычисленного для течения с учетом начального гидродинамического участка при неоднородном начальном распределении скорости; 2 – для течения с установившемся профилем скорости

Большая величина динамической компоненты безразмерного градиента давления приводит к тому, что градиент давления при стабилизированном течении стал явно выраженной немонотонной функцией от ξ (рис. 8). Возникновение и характер таких функций исследован автором в [9]. Но этот градиент еще на всей длине канала принимает только отрицательные значения. А вот функция $\frac{d\Pi(\xi)}{d\xi}$ в случае пространственно неустановившегося течения, рассматриваемом сейчас, имеет два локальных экстремума (рис. 8).

В начале течения, где диссипативная составляющая безразмерного градиента преобладает над динамической его составляющей в основном за счет значений безразмерной скорости сдвига на границе $\chi = 1$ (рис. 6) безразмерный градиент пространственно неустановившегося течения является растущей функцией. С увеличением ξ значение $\left| \frac{d\Pi}{d\xi} \right|$ уменьшается как за счет уменьшения модуля диссипативной его составляющей (рис. 7), так и за счет уменьшения динамической составляющей (63). На некотором расстоянии от входа динамическая составляющая становится намного меньше модуля диссипативной составляющей безразмерного градиента давления и поэтому безразмерный градиент давления, оставаясь отрицательным, начинает увеличиваться по абсолютной величине вдоль ξ . Это и приводит к появлению локального максимума в распределении $\frac{d\Pi(\xi)}{d\xi}$ в случае пространственно неустановившегося течения (рис. 8).

Далее вниз по течению происходит уменьшение модуля безразмерного градиента давления уже вследствие уменьшения величины средней по площади поперечного сечения канала скорости течения жидкости. Это приводит как к уменьшению динамической составляющей безразмерного градиента давления, так, очевидно, и к уменьшению абсолютных величин скоростей сдвига на стенках канала, поскольку здесь уже пограничные слои вблизи границ канала полностью сформированы. А это ведет к уменьшению абсолютной величины диссипативной компоненты безразмерного градиента давления, т.е. градиент давления опять становится возрастающей функцией ξ , и, в конечном результате, формируется локальный минимум в зависимости $\frac{d\Pi(\xi)}{d\xi}$ (8).

При этом, также как и в ранее рассмотренных случаях течения, начиная с некоторого расстояния от входа в канал модуль градиента давления в пространственно неустановившемся течении меньше модуля градиента давления стабилизированного течения (рис. 8). Причины такого соотношения величины градиентов давления мы рассмотрели ранее и они, как видно из рисунка 4, не изменились.

Безразмерное давление только в начале течения на участке гидродинамической стабилизации изменяется интенсивнее, чем в гидродинамически стабилизированном течении (рис. 9). И поскольку на некотором расстоянии от входа в канал модуль градиента в пространственно неустановившемся течении становится меньше, чем модуль градиента стабилизированного течения, перепад давления вдоль течения с неоднородным профилем скорости становится меньше, чем перепад давления в стабилизированном течении (рис. 9). Но при $Re_f = 100$ разность в распределении безразмерных давлений, представленных на рисунке 20.87, еще незначительна и в технических расчетах ею можно пренебречь. Это означает, что при расчете перепада давления в соосном коническом диффузоре с геометрией, изображенной на рисунке 2 при $Re_f = 100$, можно пользоваться зависимостями полученными для стабилизированного течения [9], т.е. без учета входных поправок [3].

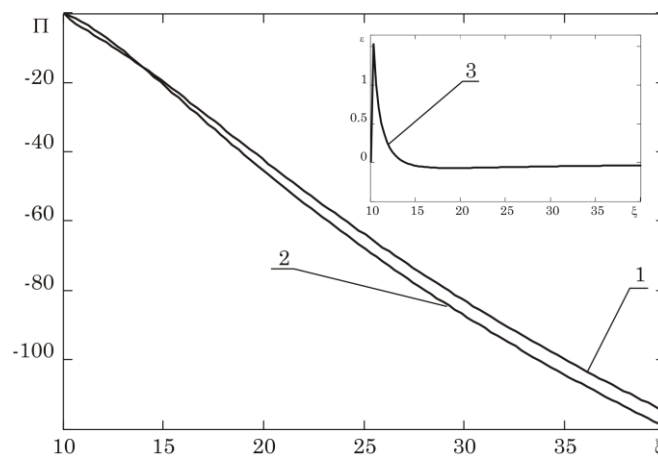


Рисунок 9 – Распределение вдоль ламинарного диффузорного течения с $Re_f = 100$ в секториальном канале постоянной ширины безразмерного давления: 1 – вычисленного для течения с учетом начального гидродинамического участка при неоднородном начальном распределении скорости; 2 – для течения с установившемся профилем скорости; 3 – относительное отклонение распределения 1 от распределения 2

Увеличение числа Рейнольдса до значения равно 200 приводит к тому, что несимметричный профиль скорости сохраняется на расстоянии порядка 25–30 значений

ширины. Координата гидродинамической стабилизации, оцененная по распределению безразмерных скоростей на срединной поверхности канала, равна $\xi_{н.г} = 32.7$. Приближенное выражение (70) в данном случае дает значение $\xi_{н.г} = 20.5$. Лучшее приближение дает выражение (73) – 30.2.

С ростом числа Рейнольдса увеличивается влияние инерционных свойств течения, что и приводит к увеличению длины начального гидродинамического участка, на котором профиль скорости сохраняет несимметричность относительно срединной поверхности канала. При этом средняя скорость жидкости уменьшается вдоль течения, и вследствие инерционности течения вблизи внутренней границы канала на некотором отрезке сохраняется наибольшая в поперечном сечении канала скорость. Поэтому на начальном этапе течения именно вблизи внутренней поверхности протекает большая часть жидкости, во всяком случае, расход жидкости вблизи внутренней поверхности больше, чем при параболическом распределении скорости. И поскольку в любом поперечном сечении канала должно выполняться условие постоянства расхода (8), то из-за того, что у внутренней границы ($\chi = 1$) канала скорость оказывается завышенной, вблизи внутренней границы ($\chi = 0$), скорость жидкости при больших значениях Re_f в начале канала сперва уменьшается, а затем, совместно со стабилизацией профиля скорости у внутренней границы, стремится к своему установившемуся распределению снизу.

Увеличение числа Рейнольдса до 1000 вносит качественное изменение в распределение скорости жидкости в секторальном диффузоре.

В этом случае область с максимальными значениями скорости жидкости распространяется на значительное расстояние от входа в канал (рис. 10), где увеличение поверхности поперечного сечения канала уже существенно. При этом увеличивается и поверхность поперечного сечения, через которую протекает поток жидкости с максимальными скоростями, т.е. увеличивается расход жидкости через поверхность, локализованную в области максимальных значений в распределении скорости. Для того, чтобы поддержать здесь увеличение расхода, вблизи границы $\chi = 0$ возникает возвратное течение (рис. 10). На рисунке видна область канала с отрицательными значениями скорости. Этого требует и условие постоянства расхода. Только в таком случае оно может быть выполнено.

Поэтому, в данном случае течения безразмерная скорость сдвига на границе $\chi = 0$ на некотором расстоянии от входа становится равной нулю (рис. 11). На этой линии внешней границы канала происходит отрыв пограничного слоя и далее вниз по течению формируется область вихревого движения с возвратным течением вблизи границы $\chi = 0$.

Понятно, что в отрывных течениях уравнения пограничного слоя не работают. Но в нашем случае на одной из границ у канала пограничный слой не нарушается, а в целом для потока жидкости через поперечное сечение канала динамическая составляющая изменения давления вследствие теоремы Бернулли должна быть справедливой. Ранее мы видели, что уже при $Re_f = 500$ в начале канала преобладает характерная инерционная сила. Поэтому можно было хотя бы качественно рассмотреть характер изменения безразмерного давления и его градиента вдоль пространственно неустановившегося течения. Но в данном случае интереснее проанализировать условия возникновения отрыва пограничного слоя и возвратного течения с помощью использованной нами модели пространственно неустановившегося течения.

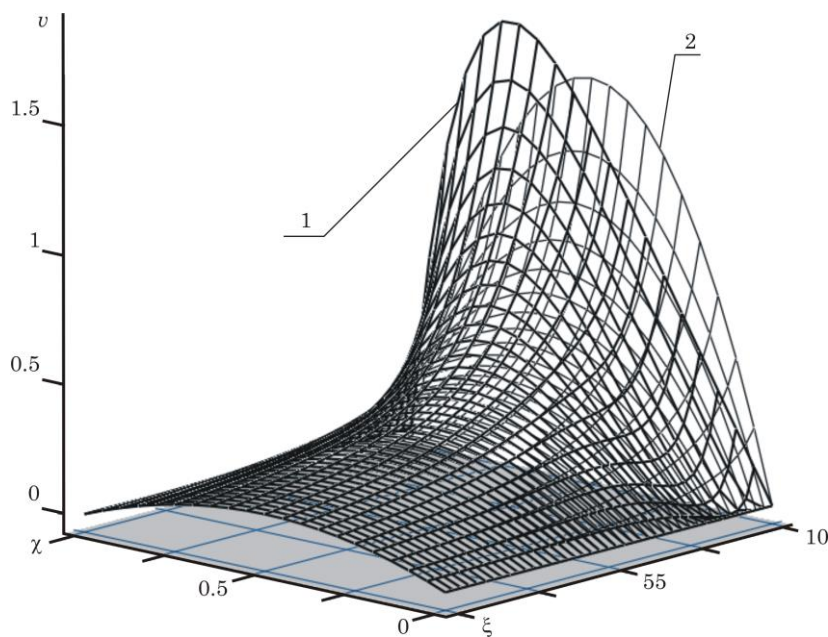


Рисунок 10 – Распределение безразмерной скорости жидкости вдоль течения в секториальном диффузоре с числом Рейнольдса $Re_f = 1000$: 1 – для неоднородного начального распределения скорости (15); 2 – для течения с установившемся распределением скорости

За линией отрыва пограничного слоя формируется область с возвратным течением. В наиболее развитом месте толщина области с возвратным течением при $Re_f = 1000$ не превосходит 0.1 ширины канала.

Для данной геометрии канала и начального распределения скорости, определяемого выражением (15), отрыв пограничного слоя от границы $\chi = 0$ происходит при числах Рейнольдса, составляющих величину порядка $Re_f = 600$ (рис. 12).

Увеличение числа Рейнольдса сдвигает линию отрыва пограничного слоя ближе к входу в канал (рис. 12). Вместе с тем мы видим, что для чисел Рейнольдса, больших 600, интервал изменения безразмерной радиальной координаты ξ , на котором формируется возвратное течение, является конечным, а это означает, что с уменьшением средней по площади поперечного сечения скорости вдоль канала, восстанавливается однонаправленное течение жидкости.

Заметим также, что область канала, на которой может наблюдаться возвратное движение жидкости, с увеличением числа Рейнольдса увеличивается как вверх, так и вниз по течению (рис. 12).

Заключение

В настоящей работе впервые решена задача развития ламинарного течения в секториальном диффузоре постоянной ширины с неоднородным профилем скорости жидкости на входе в канал.

Показано, что для оценки безразмерной координаты стабилизации пространственно неустановившегося течения в пределах изменения числа Рейнольдса $0 < Re_f \leq 50$ можно использовать выражения из [2], а при числах Рейнольдса $Re_f > 50$ необходимо использовать для оценки $\xi_{н.г.}$ выражение (73).

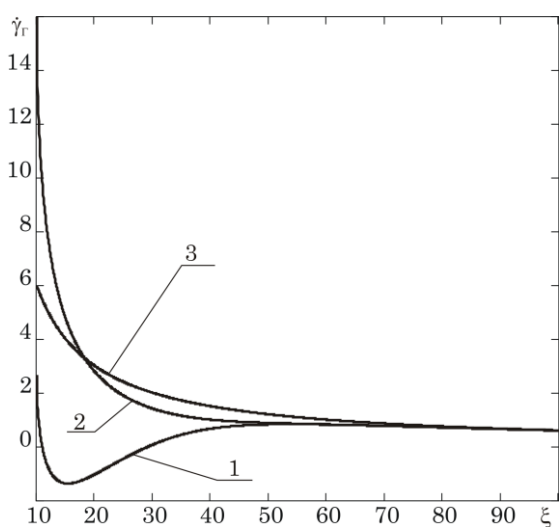


Рисунок 11 – Распределение безразмерной скорости сдвига на границах секториального диффузора при ламинарном течении с числом Рейнольдса $Re_f = 1000$: 1 – на границе $\chi = 0$ в условиях развивающегося течения при неоднородном начальном распределении скорости поперек канала; 2 – на границе канала $\chi = 0$ при установившемся течении; 3 – распределение модуля безразмерной скорости сдвига на границе $\chi = 1$ при течении с неоднородным начальным распределением скорости

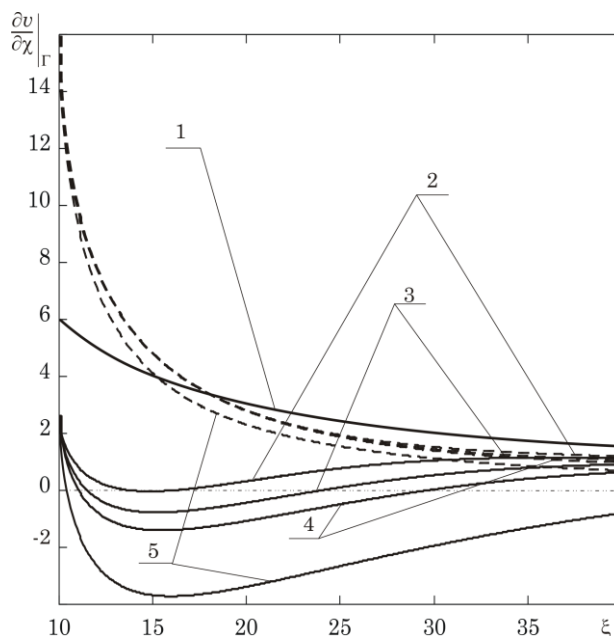


Рисунок 12 – Распределение вдоль ламинарного диффузорного течения в секториальном канале безразмерной скорости сдвига на границе $\chi = 0$ – сплошные линии и модуля безразмерной скорости сдвига на границе $\chi = 1$ – штриховые линии: 1 – для течения со стабилизированным профилем скорости; 2 – для течения с неравномерным распределением скорости на входе в канал и $Re_f = 600$; 3 – $Re_f = 800$; 4 – $Re_f = 1000$; 5 – $Re_f = 2000$

Отметим также, что при определении давления в соосных конических диффузорах, перед течением в которых жидкость проходит через другие коаксиальные каналы, можно в пределах изменения числа Рейнольдса $0 \leq Re_f \leq 150$ использовать выражение полученные для стабилизированного течения [9], т.е. без учета входных поправок.

И, наконец, необходимо сказать, что в таких течениях при больших числах Рейнольдса, вероятно при $Re_f \geq 600$, на внешней границе диффузора может возникнуть отрыв пограничного слоя.

Обозначения: h – ширина соосного конического канала, м; P_0, P – давление на входе в канал и текущее давление, Па; Q – объемный расход жидкости, м³/с; R_0, R_1 – значения радиальных координат входа в соосный конический канал и выхода из него, м; r – радиальная координата в цилиндрической системе координат, м; r_0, r_1 – значения радиальных координат входа в секториальный канал и выхода из него, м; V_r – радиальная составляющая размерной скорости в цилиндрической системе координат, м/с; V_0 – средняя по поперечному сечению размерная скорость на входе в канал, м/с; z – аксиальная координата в цилиндрической системе координат, м; α – половина угла раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала, рад; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с; ρ – плотность жидкости, кг/м³; $\xi_{н.г.}$ – безразмерная радиальная координата, ограничивающая длину начального гидродинамического участка; Re_f – число Рейнольдса.

Литература

1. Ульев Л.М. Развитие ламинарного диффузионного течения в соосных конических каналах постоянной ширины // ITE. 2003, № 2. С. 47–57.
2. Ульев Л.М. Длина начального гидродинамического участка при ламинарном диффузорном течении в соосных конических каналах постоянной ширины // ITE. 2003, № 4. С. 56–64.
3. Ульев Л.М. Оценка перепада давления на начальном гидродинамическом участке ламинарного течения в соосном коническом диффузоре // ITE.. 2005. № 4. С. 11–28.
4. Ульев Л.М. Развитие ламинарного диффузорного течения в конической щели постоянной ширины // ITE. 2000, №1. С. 57–69.
5. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение. 1982. – 423 с.
6. Joshi M.V. Dies For Plastic Extrusion. –Delhi: Macmillan India Limited. 1984.– 176 p.
7. Басов Н.И. Казанков Ю.В. Литьеовое формование полимеров. – М.: Химия. 1984.– 248 с.
8. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. – М.: Химия. 1974. – 688 с.
9. Ульев Л.М. Ламинарное диффузорное течение в секториальном канале постоянной ширины с частичным учетом инерциальных свойств // Вестник НТУ «ХПИ». 2003. Вып. 11. Т.2. С. 122–131.
10. Ульев Л.М. Течение и теплообмен в кольцевых конических каналах. Аппроксимация плоским каналом // ITE. 2000. № 2. С. 55–64.
11. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.-Л.: Госиздат-техтеорлит. 1951. – 420 с.
12. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир. 1985. – 384 с.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – С. 724.
14. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1974. С. 712.
15. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука. глав. ред. физ.-мат. лит. 1969. – 424 с.

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

РОЗВИТОК ЛАМІНАРНОЇ ДИФУЗОРНОЇ ТЕЧІЇ У СПІВВІСНОМУ КОНІЧНОМУ КАНАЛІ З НЕОДНОРІДНИМ ПОЧАТКОВИМ ПРОФІЛЕМ ШВИДКОСТІ

У дійсній роботі вперше вирішена задача розвитку ламинарної течії в секториальному диффузорі постійної ширини з неоднорідним профілем швидкості рідини на вході в канал. Показано, що при визначенні тиску в таких течіях можна в межах зміни числа Рейнольдса $0 \leq Re_f \leq 150$ використовувати вирази отримані для стабілізованої течії [9], тобто без обліку вхідних поправок.

І, нарешті, необхідно сказати, що в таких течіях при великих числах Рейнольдса, імовірно при $Re_f \geq 600$, на зовнішній поверхні дифузора може виникнути відрив прикордонного шару.